

Zerfallsstatistik in Detektorsystemen: Die Totzeit und ihre Korrektur

Bernd Laquai, 14.7.2025

Wenn man in Lehrbüchern Informationen zur Genauigkeit von Strahlungsmessungen sucht, dann wird in den meisten nur die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls einer Strahlungsquelle thematisiert. Bezüglich des Detektors wird meist nur der Ankunftsprozess von Photonen oder Teilchen behandelt, der am Ende zu einer Poisson-Verteilung führt. Diese Verteilung beschreibt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass in einer Messzeit T genau k Impulse eintreffen, wenn die mittlere Ankunftsrate pro Zeiteinheit λ beträgt. Der Mittelwert dieser Verteilung ist $\mu = \lambda \cdot T$ und stellt die mittlere Anzahl der potenziellen Zählereignisse in der Messzeit T dar. Da die Streuung für eine Poisson-Verteilung $\sigma = \sqrt{\mu}$ gilt, kann man leicht erkennen, dass die Zahl, der Impulse in der Messzeit T keine fixe Größe ist, sondern mit $\sigma = \sqrt{\lambda \cdot T}$, um die mittlere Anzahl an Zählereignissen schwankt und damit eben eine Messunsicherheit erzeugt, wenn man aus einer idealen Zählratenmessung mit dem Detektor die Aktivität der Probe oder die Strahlungs-dosis an einem Ort ableiten will.

Nun ist aber der statistische Fehler durch den zufälligen Zerfall nicht die einzige Unsicherheit, mit der man es in der Strahlungsmesstechnik bei Zählraten-basierten Messungen zu tun hat. Eine weitere Unsicherheit entsteht durch den sogenannten Totzeitfehler im Detektorsystem. Totzeitfehler entstehen dabei in gasgefüllten Zählrohren, und in der verarbeitenden Elektronik. Im Gegensatz zu Ionisationskammern werden z.B. Geiger-Müller Zählrohre bei Spannungen betrieben, die bei einer Primärlonisation eines Gasmoleküls im Zählrohr durch verschiedene Vervielfachungseffekte zu lawinenartigen Sekundär-Ionisationen führt, so dass am Ende meist das gesamte Gasvolumen ionisiert ist und damit eine sehr starke Ladungsvermehrung entsteht. Damit der Ladungsfluss zeitlich begrenzt bleibt, muss die fast vollständige Ionisation auch wieder abgebaut werden. Dazu wird dem Zählgas ein sogenanntes Löschgas (Quenching-Gas) hinzugefügt (Brom, Methanol), welches die Ionisationsenergie zeitverzögert aufnimmt und damit weitere Ionisationen während der Erholzeit verhindert. Zudem wird das Geiger-Müller Zählrohr mit einem hohen Anoden-Vorwiderstand betrieben, so dass die Spannung ab einem bestimmten Ladungsfluss (Strom) zusammenbricht und der Ladungsfluss auch auf diese Weise gestoppt wird. In der Phase der Löschung der Zählgas-Ionisation reagiert das Zählrohr dann aber auf keine weiteren eintreffenden Strahlungsquanten und ist für diese Zeitdauer T_D quasi tot.

Aber auch eine Signalverarbeitungseinheit kann einen Totzeitfehler erzeugen. So wird beispielsweise oft eine analoge Pulsformung der Detektorimpulse gemacht, vorwiegend in der Gamma-Spektroskopie, wo nicht nur die Impulsrate, sondern auch die im Detektor erzeugte Ladungsmenge möglichst störungsfrei erfasst werden muss. Eine solche Pulsformung geht meist auch mit einer Verlängerung der Detektorimpulse einher, so dass die Wahrscheinlichkeit steigt, dass sich zwei rasch aufeinanderfolgende Impulsantworten überlagern und wie ein Impuls erscheinen. Daher können auch mehrere rasch aufeinanderfolgende Impulse unter Umständen nicht mehr separat gezählt werden, sondern verschmelzen zu einem Impuls mit entsprechend langer Dauer, was dann zum Beispiel zu einem Fehler bei der Aktivitätsbestimmung führen kann, wenn dies zu häufig auftritt.

Man unterscheidet nun zwei Typen an Totzeitfehlern, den nicht-paralysierenden Totzeitfehler und den paralysierenden Totzeitfehler. Da in beiden Fällen die in die Totzeit fallenden Eingangseignisse in den Detektor vom zählenden System nicht gezählt werden, ist die Ausgangszählrate

λ' nicht identisch mit der idealen Eingangszählrate λ sondern niedriger. Dabei ist die Eingangszählrate λ diejenige, die das zählende System am Ausgang erzeugen würde, wenn das Detektorsystem mit seiner Signalaufbereitung sowie dem Zählsystem keine Totzeit aufweisen würde.

Im Fall des nicht-paralysierenden Totzeitfehler tragen die Ereignisse, welche in die Totzeit fallen nicht zur Totzeit bei. Dies ist beispielsweise bei einem Interrupt-gesteuerten Zählsystem eines Mikrocontrollers der Fall, wenn die Interrupthandler-Routine die Zählimpuls-getriggerte Interrupt-Verarbeitung gleich zu Beginn deaktiviert und erst nach Abarbeitung aller Anweisungen in der Routine wieder reaktiviert, damit die Interrupt-Queue während der Verarbeitung nicht unkontrolliert überläuft. Auch bei den meisten Geiger-Müller-Zählrohren kann man unmittelbar nach der Signalauskopplung an einem Oszilloskop mit unendlicher Überlagerungszeit (Persistence) und konstanten Trigger-Bedingungen erkennen, dass selbst über eine sehr lange Akkumulationszeit die Breite der überlagerten Impulse auch bei hohen Zählraten nicht ansteigt.

Beim paralysierenden Totzeitfehler dagegen verlängern Ereignisse, die in eine Totzeit fallen, die Totzeit durch das Starten eines neuen Totzeitintervalls, was bei sehr hohen Eingangszählraten λ sogar dazu führen kann, dass die Ausgangszählrate λ' komplett Null wird. Dies ist oft bei einem analogen Pulse-Shaping der Fall, wo sich sehr viele rasch aufeinander folgende Impulse zu einem langen Impuls überlagern können (Pile-Up). Dies tritt insbesondere dann auf, wenn die Detektor-Signale mit einem Analog-Digitalwandler bei relativ niedriger Rate (z.B. Soundkarte des PC) gewandelt werden müssen und deswegen in Signale mit hohen Pulsbreiten flächenproportional umgeformt werden. Detektorsysteme mit ihrer elektronischen Signalverarbeitung stellen in der Realität gelegentlich auch einen Zwischenfall zwischen diesen beiden idealisierten Totzeit-Modellen dar. Daher ist es empfehlenswert, zu testen, welches das dominierende Verhalten des Detektor- und Zählsystems bezüglich der Totzeit ist.

Man kann nun die durch die Totzeit reduzierte Ausgangszählrate λ' bei bekannter Eingangszählrate λ durch statistische Überlegungen bestimmen.

Für einen nicht-paralysierenden Totzeitfehler ist die Bestimmung der Ausgangszählrate λ' sehr einfach möglich. Hier kann man mit Mittelwerten rechnen. Man kann sagen, dass wenn die Totzeit T_D beträgt, das Zählrohr im Mittel während des Bruchteils $T_D \cdot \lambda'$ unempfindlich ist. Wenn dabei die Eingangszählrate λ ist, dann ist die Rate der nicht registrierten Ereignisse $\lambda \cdot T_D \cdot \lambda'$. Dies entspricht der Verlustrate an Impulsen. Die gemessene Impulsrate ergibt sich daher aus der Differenz der Eingangszählrate und der Verlustrate, also ist die gemessene Ausgangszählrate λ' :

$$\lambda' = \lambda - \lambda \cdot T_D \cdot \lambda' = \lambda (1 - T_D \cdot \lambda')$$

Eine andere Argumentation ist, dass wenn λ' die gemessene Ausgangszählrate ist, man für jedes am Ausgang erscheinende Ereignis noch $\lambda \cdot T_D$ Ereignisse dazuzählen muss, damit man die wahre Eingangszählrate λ bekommt, also gilt ebenfalls:

$$\lambda = \lambda' (1 + \lambda \cdot T_D)$$

Umgeformt ergibt sich für die gemessene Ausgangsrate λ' mit beiden Argumentationen:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1 + \lambda \cdot T_D}$$

Für das Zählrohr von Vacutec des Typs 70031A, wie es in den ODL-Sonden des BfS verbaut ist, wird die Totzeit mit $\leq 150\mu\text{s}$ spezifiziert. Abb. 1 zeigt das Verhalten des nicht-paralysierenden

Totzeit-Modells für diese Totzeit. Man kann deutlich erkennen, dass die Ausgangszählrate λ' nur zu Beginn annähernd linear mit der Eingangszählrate λ ansteigt und dann allmählich in eine Sättigung mit etwa 6000 cps übergeht. Ein Zählratenverlust von 10% wird für $\lambda = 0.1/(0.9 \cdot T_D)$ erreicht, also für 741cps. Setzt man die im Datenblatt gegebenen Werte für die Nullrate von 40cpm (0.667cps) und Dosisempfindlichkeit für Cs137 von 14cps/(μ Sv/h) des Zählrohrs ein, ergibt sich ein Wert von 53 μ Sv/h, bei der die Ausgangszählrate λ' dann durch die Totzeit bedingt etwa 10% geringer wäre als die ideale Eingangszählrate λ und gemäß der linearen Spezifikation.

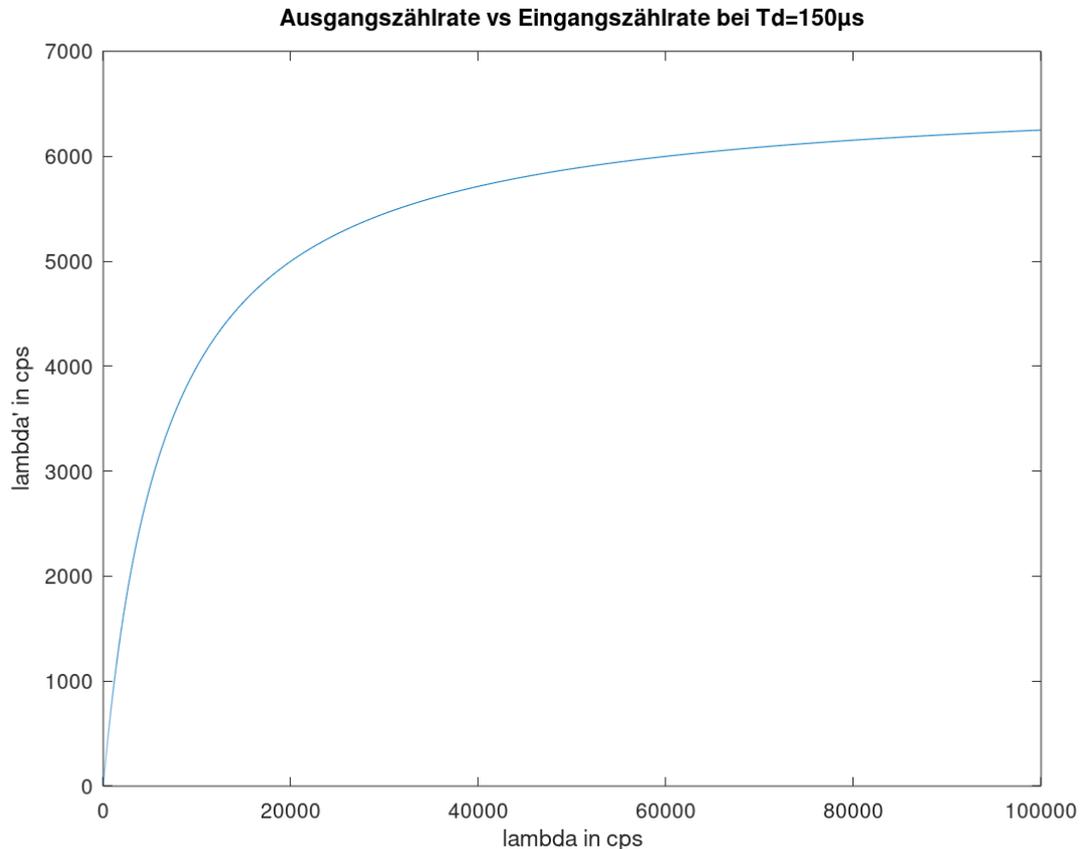


Abb. 1: Verhalten eines Detektorsystems mit Totzeit $T_D = 150\mu s$ bei hohen Zählraten im nicht-paralysierenden Fall

Zur Analyse des paralysierenden Totzeitfehlers geht man von der Poisson-Verteilung aus. Sie ist gegeben durch:

$$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$$

Für $k=0$ ergibt sich daher:

$$P(X = 0) = e^{-\mu} = e^{-\lambda \cdot T_D}$$

$P(X=0)$ ist also die Wahrscheinlichkeit, dass kein Ereignis in die Totzeit T_D fällt. Damit kann man nun die Wahrscheinlichkeit angeben, dass ein oder mehr Ereignisse in diese Totzeit fallen, das ist der Verlustanteil an Zählimpulsen. Das ist einfach die Gegenwahrscheinlichkeit zu $P(X=0)$:

$$P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda \cdot T_D}$$

Damit kann man sagen, dass man etwa 10% an Zählpulsen verliert, wenn $\lambda \cdot T_D = 0.1$ ist. Für den Fall, dass man bei diesem paralysierenden Modell ebenfalls eine Totzeit von $150\mu\text{s}$ annehmen würde, würde sich ein Zählratenverlust von 10% ergeben, wenn die ideale Eingangszählrate $\lambda = 0.1/150\mu\text{s} = 625\text{cps}$ betragen würde.

Nun kann man sich aber auch klar machen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass keine Impulse verschluckt werden, also $P(X=0)$, der Anteil von λ sein muss, der tatsächlich gezählt wird. Also ist die Ausgangszählrate λ' die bei einer paralysierenden Totzeit von T_D tatsächlich gemessen wird:

$$\lambda' = \lambda \cdot P(X = 0) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot T_D}$$

Diese Funktion liefert also einen Ausgangswert für λ' der zunächst λ folgt, aber dann wieder abnimmt und zunehmend von der Exponentialfunktion gegen immer kleinere Werte gedrückt wird, so dass die Ausgangszählrate λ' irgendwann Null wird. Dies erklärt auch den Begriff „paralysierend“ und ist ein wesentliches Indiz dafür, dass sich ein System durch dieses Modell beschreiben lässt.

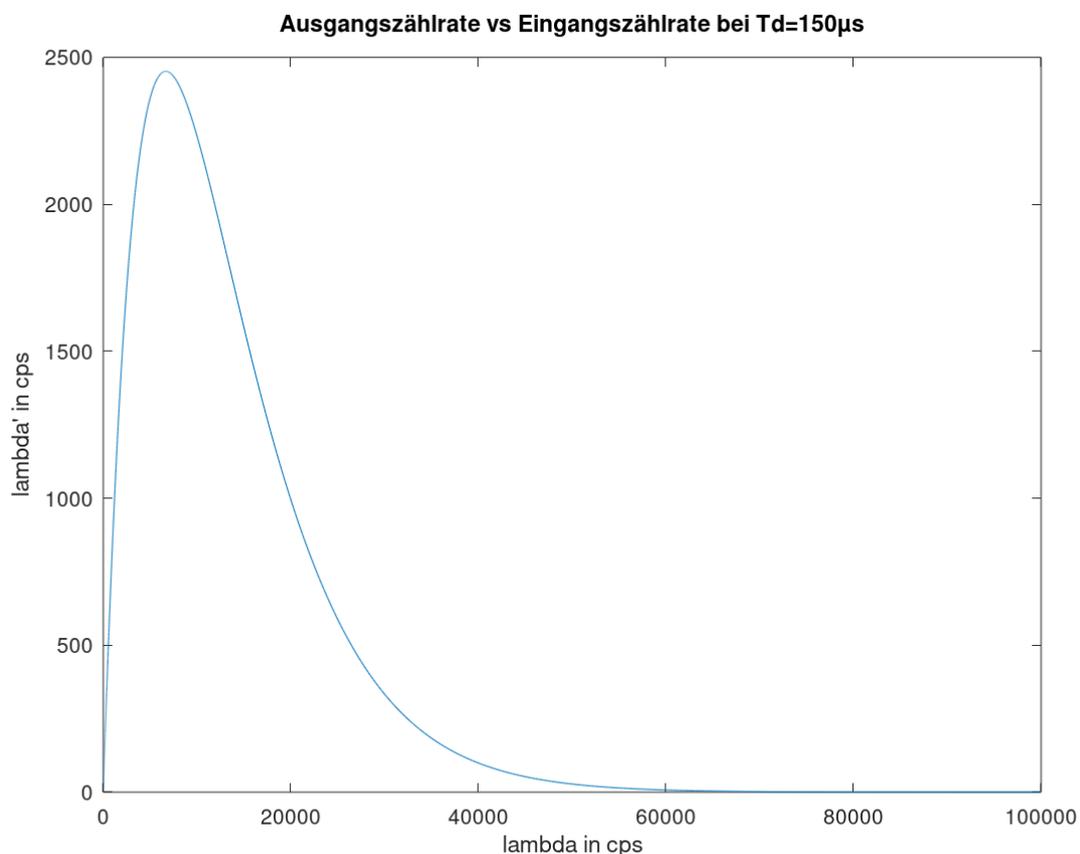


Abb. 2: Verhalten eines Detektorsystems mit Totzeit $T_D = 150\mu\text{s}$ bei hohen Zählraten im paralysierenden Fall

Wenn man nun diese Zusammenhänge kennt, stellt sich die Frage, lässt sich die Totzeit dann auch wieder korrigieren? Im nicht-paralysierenden Fall ist dieser Zusammenhang zwischen Ausgangszählrate λ' und Eingangszählrate λ sehr einfach umkehrbar. Es gilt dann:

$$\lambda = \frac{\lambda'}{1 - \lambda' \cdot T_D}$$

Das heißt, wenn man die Totzeit kennt, dann kann man aus der gemessenen Ausgangszählrate λ' die wahre Eingangszählrate λ analytisch berechnen. Im Falle des paralyisierenden Modells ist eine vollständige Umkehr dagegen nur mit numerischen Mitteln möglich. Allerdings kann die Ausgangszählrate λ' als Funktion der Eingangszählrate λ auch mit einfachen Funktionen approximiert werden, um diese dann umzukehren. Der einfachste Fall ist die Approximation der e-Funktion durch eine Gerade (Tangente) im Nullpunkt. Die Tangente an die Funktion im Nullpunkt ist gegeben durch $\lambda' = \lambda - \lambda^2 \cdot T_D$ und stellt eine quadratische Funktion von λ dar, die sich analytisch invertieren lässt. Damit kann dann ebenfalls eine Totzeitkorrektur relativ einfach analytisch berechnet werden, die aber nicht mehr beliebig genau ist.

Nun kann man mit Hilfe der negativ-exponentiellen Abstandsverteilung (siehe /6/, /9/) das Eintreffen der Ereignisse im Falle des Poisson-Prozesses simulieren und damit numerisch die Zusammenhänge nachweisen. Simuliert man so die Ausgangsrate bei vorgegebener Eingangsrate für verschiedene Totzeiten, lassen sich sowohl das Verhalten des paralyisierenden und nicht-paralyisierenden Modells, wie auch die Geradenapproximation des paralyisierenden Modells zusammen in einem Graphen darstellen (Abb. 3). Die blauen Punkte zeigen die Abhängigkeit der Ausgangszählrate λ' von der Totzeit in der Zufalls-Simulation mit Hilfe der Abstandsverteilung bei

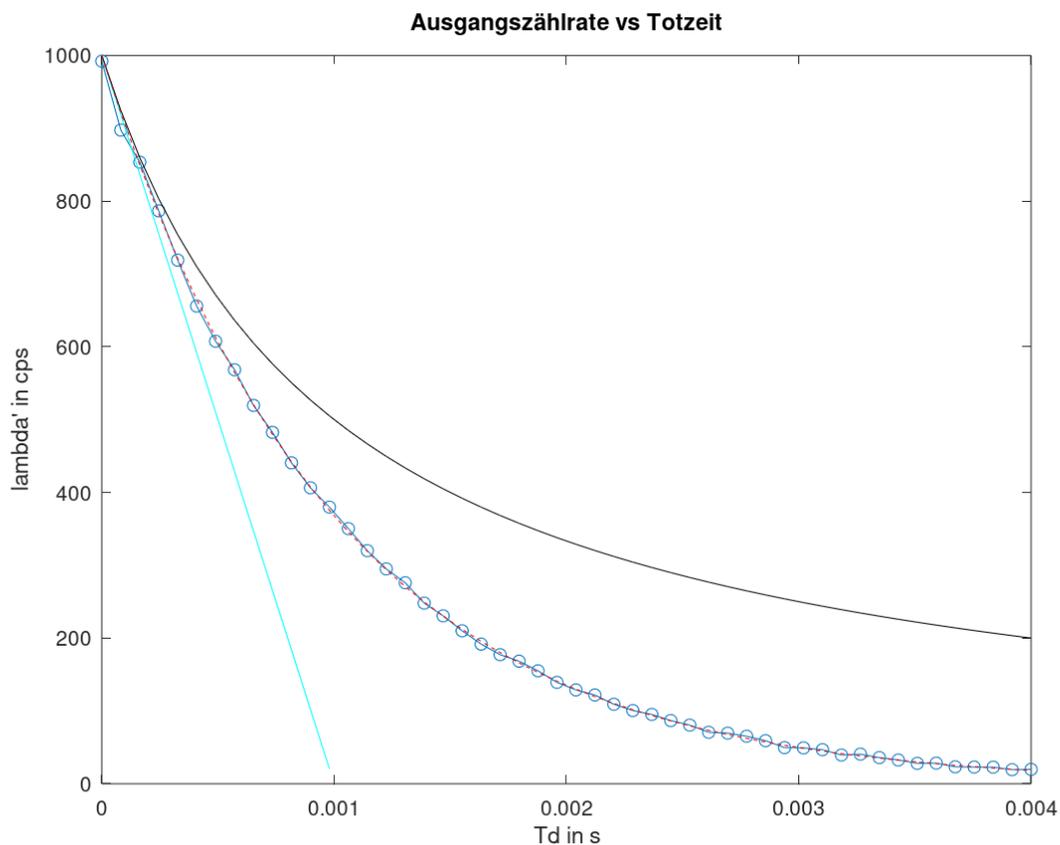


Abb. 3: Simulation der Totzeit mit der Wartezeitverteilung des Poisson-Prozesses (blau) für 1000cps im Vergleich zum paralyisierenden (rot) und nicht-paralyisierenden Modell (schwarz). In türkis die Tangentenapproximation an das paralyisierende Modell.

10000 zufälligen Ereignissen, einer konstanten Eingangszählrate $\lambda=1000\text{cps}$ und einem paralyzierenden Modell. Die rote Kurve zeigt den analytisch berechneten Zusammenhang für das paralyzierende Modell. In Türkis ist die Geraden-Approximation an das paralyzierende Modell gezeigt. In schwarz ist das nicht-paralyzierende Modell dargestellt, das ebenfalls analytisch berechnet wurde. Man kann also erkennen, dass die Simulation mit der statistischen Abstandsverteilung die analytische Beschreibung der gemessenen Ausgangszählrate sehr gut darstellt.

Wie oben bereits erwähnt, lässt sich die Totzeitkorrektur im nicht-paralyzierenden Fall einfach berechnen, während sich die Abhängigkeit der gemessenen Ausgangszählrate λ' von der Totzeit und der wahren Eingangszählrate λ im paralyzierenden Fall nur dann analytisch umkehren lässt, wenn man eine geeignete Approximation des exponentiellen Zusammenhangs verwendet. Im Falle der Approximation mit der Tangente ergibt sich eine Totzeitkorrektur in Form der Gleichung:

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{1 - 4T_D\lambda'}}{2T_D}$$

Wendet man diese Korrektur auf den Fall einer Eingangszählrate von z.B. $\lambda = 100 \text{ cps}$ an, kann man an einer Simulation der Ausgangszählrate λ' in Abhängigkeit der Totzeit erkennen, dass diese Art der Approximation durchaus brauchbar konstante Ergebnisse für die Berechnung der wahren Eingangszählrate λ bei steigender Totzeit liefert, allerdings nur für Totzeiten von kleiner 2ms.

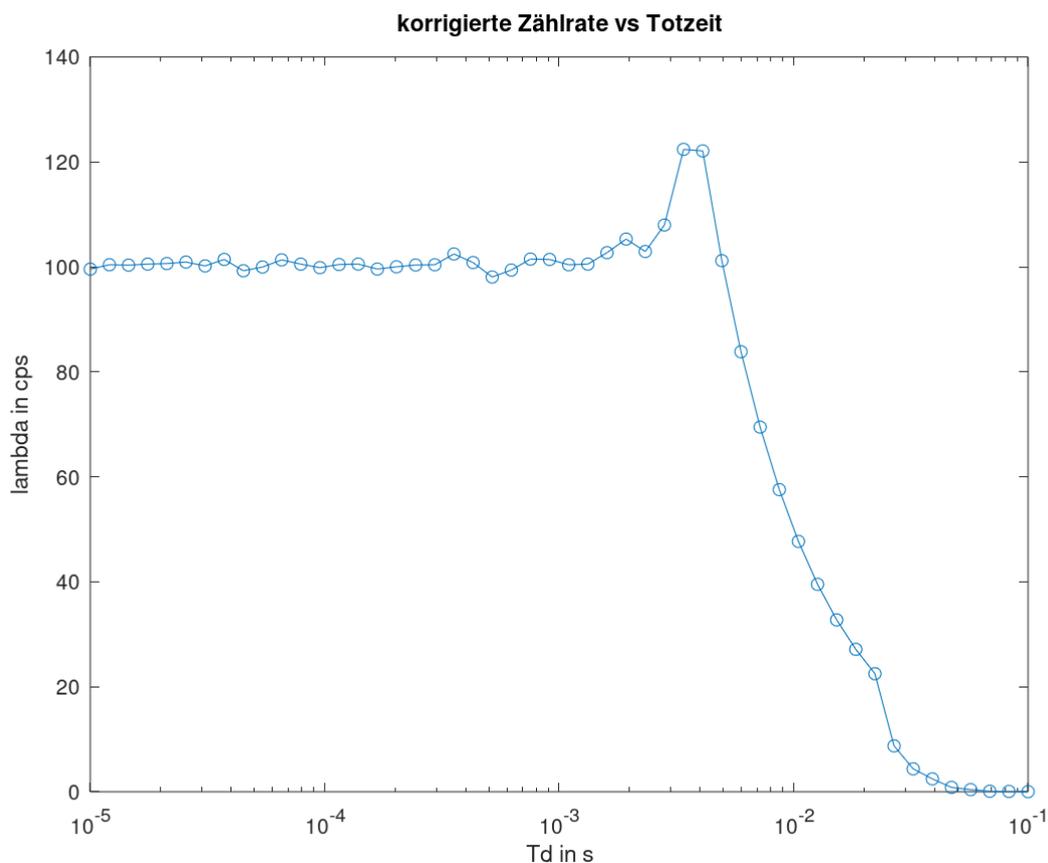


Abb. 4: Totzeitkorrektur im paralyzierenden Fall mit Hilfe der Tangentenapproximation im Nullpunkt für 100cps. Man kann erkennen, dass die Korrektur nur niedrige Verlustraten infolge einer Totzeit kompensieren kann.

Erhöht man die vorgegebene Eingangszählrate auf 1000cps liegt eine mit der linearen Approximation sinnvoll korrigierbare paralysierende Totzeit bei höchstens 200 μ s.

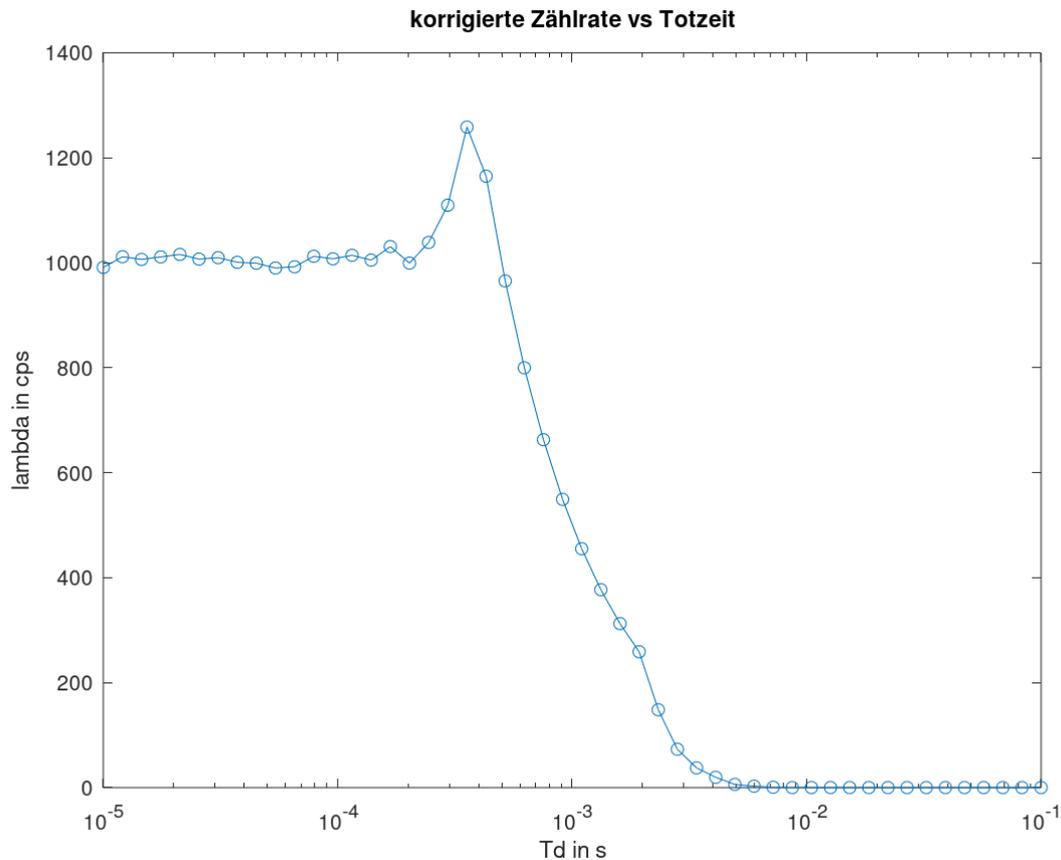


Abb. 5: Totzeitkorrektur im paralysierenden Fall mit Hilfe der Tangentenapproximation im Nullpunkt für 1000cps.

Geht man nun bei einem Audio-basierten PC-Auswertesystem aus, welches eine gute Soundkarte eine Abtastrate von 192kHz verwendet, und man die Impulse mit beispielsweise 50 Samples darstellen möchte, so bräuchte man ein Pulse-Shaping, welches die Impulse eines Gamma-Spektroskops auf mindestens 200 μ s verlängert und dabei flächenproportional umformt.

Diese Totzeit wird dann paralysierend sein, weil sich die verlängerten Impulse zu einem längeren Impuls überlagern, wenn sie in rascher Folge auf den Pulse-Shaper treffen. Dies ist mit der folgenden Spice-Simulation dargestellt (Abb. 6).

Man kann deutlich erkennen, wie sich die drei rasch aufeinanderfolgenden Impulse bei t=600 μ s zu einem einzelnen langen Impuls verlängern, das heißt jeder Impuls, der unmittelbar auf den folgenden Impuls eintrifft, verlängert die Totzeit des Systems aufs Neue. Gemäß der Simulation der Totzeitkorrektur für dieses paralysierenden System, könnte man also für 1000cps gerade noch eine sinnvolle Totzeitkorrektur auf der Basis der Tangentenapproximation durchführen.

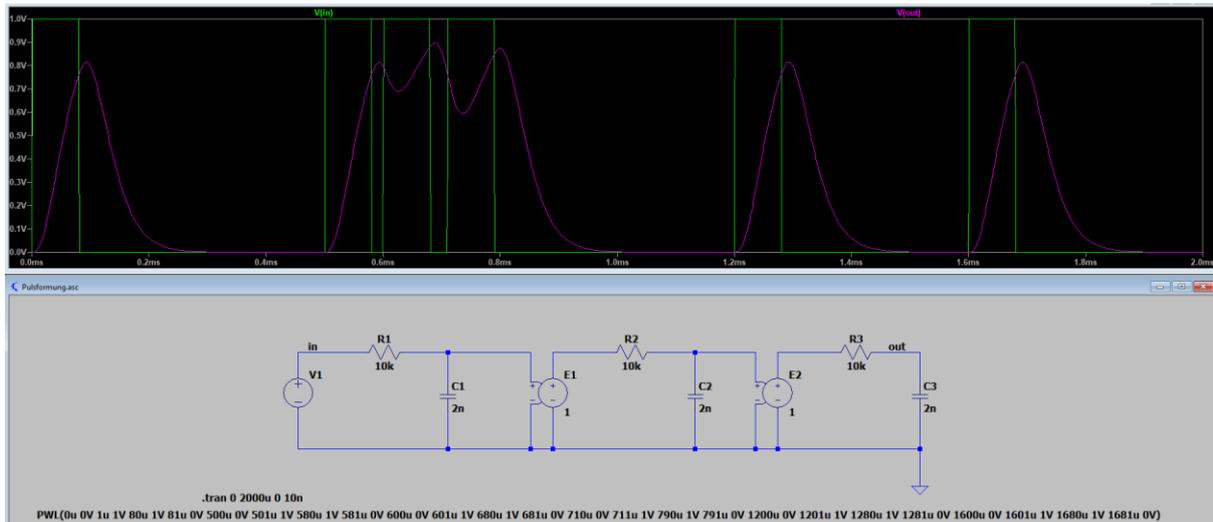


Abb. 6: LT-Spice Simulation eines Pulse-Shapers, welcher die 80µs Pulse einer Detektoreinheit (grün) auf 200µs flächenproportional umformt (lila).

In der Audio-basierten Gamma-Spektroskopie PC-Software von Therenino kann man sich den paralysierenden Totzeit-Effekt sogar live anschauen, wenn man sich im Pulse Shape Visualizer die aussortierten Impulse einer Probe mit hoher Aktivität im One-Shot Mode anschaut.

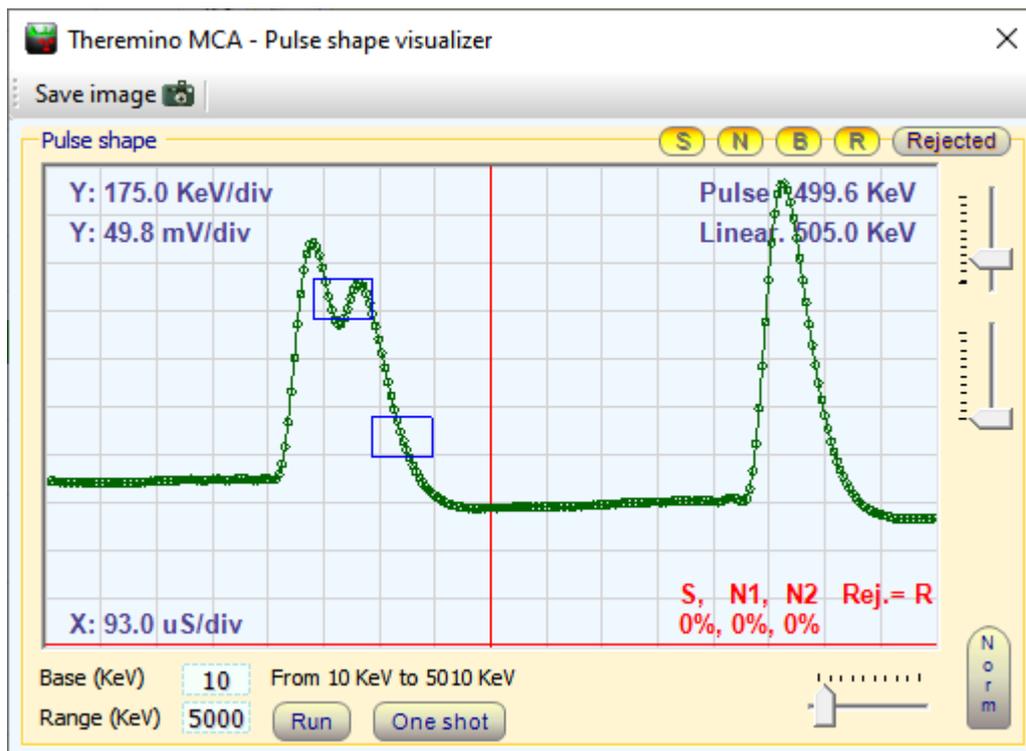


Abb. 7: Von der Therenino Software aussortierte paralysierende Impulse. Bei hoher Probenaktivität werden viele dieser Impulse erkannt und aussortiert, die Zählraten aber nicht korrigiert, so dass die Zählraten zu niedrig ausfallen.

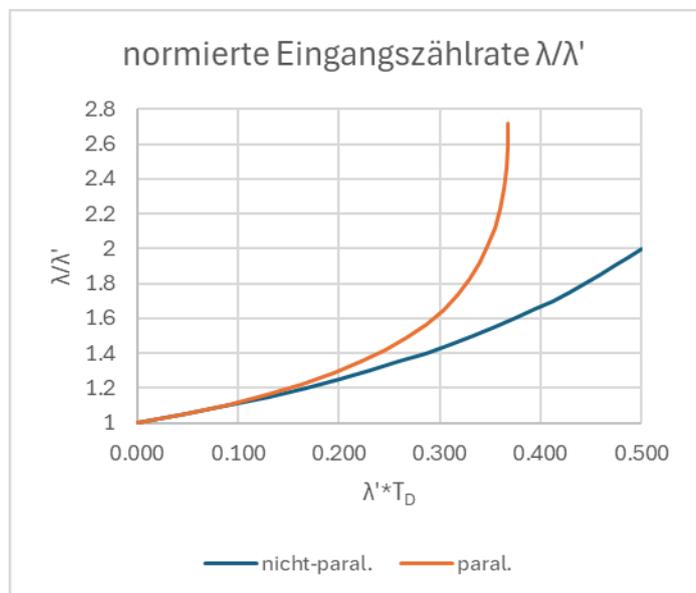
Bei hoher Aktivität tauchen dann relativ häufig Impulse auf, die durch Überlagerung mehrerer Impulse entstehen, auch mit unterschiedlichen Amplituden, wenn sie von unterschiedlichen Photonen-Energien stammen. Die Tatsache, dass die Software solche verlängerten Impulse zu erkennen versucht und zugunsten eines korrekt dargestellten Spektrums aussortiert, bedeutet

aber auch, dass die Zählraten in den einzelnen Bins die aussortierten Impulse nicht enthalten. Das wiederum heißt, dass die Aktivität einer Gamma-Linie unter einem Peak dann nicht mehr richtig bestimmt werden kann, da Zählraten von der Theremino-Software nicht korrigiert werden.

Anhang

Für eine übersichtliche Tabellen-basierte Totzeit-Korrektur kann die Abhängigkeit der normierten Eingangszählrate λ/λ' von der normierten Zeitkonstante $\lambda'*T_D$ benutzt werden:

nicht-paral.		paral.	
$\lambda'*T_D$	λ/λ'	$\lambda'*T_D$	λ/λ'
0.000	1	0.000	1.00
0.048	1.05	0.048	1.05
0.091	1.1	0.090	1.11
0.130	1.15	0.129	1.16
0.167	1.2	0.164	1.22
0.200	1.25	0.195	1.28
0.231	1.3	0.222	1.35
0.259	1.35	0.247	1.42
0.286	1.4	0.268	1.49
0.310	1.45	0.287	1.57
0.333	1.5	0.303	1.65
0.355	1.55	0.317	1.73
0.375	1.6	0.329	1.82
0.394	1.65	0.339	1.92
0.412	1.7	0.348	2.01
0.429	1.75	0.354	2.12
0.444	1.8	0.359	2.23
0.459	1.85	0.363	2.34
0.474	1.9	0.366	2.46
0.487	1.95	0.367	2.59
0.500	2	0.368	2.72



Literatur

/1/ Institut für Kernphysik Universität zu Köln; Bachelor-Praktikum; B3.1: Statistik der Kernzerfälle
https://ikp.uni-koeln.de/sites/ikp/data/praktikum/B3.1_statistik_de.pdf

/2/ J. Weber; Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY; Zählverlust in elektronischer Logik durch Statistik und Totzeit
https://www-library.desy.de/preparch/desy/scan/int_rep/1963-a2.102.pdf

/3/ Universität Aachen; Fortgeschrittenenpraktikum für Bachelorstudenten der Physik; Versuch T7; Gasdetektoren und Statistik

<https://institut2a.physik.rwth-aachen.de/de/teaching/praktikum/Anleitungen/v07.pdf>

/4/ N. Stirba G. Trendel; V19 - Geiger-Müller-Zählrohr Schlüsselexperimente Physik in der gymnasialen Oberstufe;

<https://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdatenbank/material/download/8037>)

/5/ K. Huber, Strahlencentrum Univ. Gießen; Zählratenstatistik;

<http://www.strz.uni-giessen.de/ExpHelp/statistik/statistik.pdf>

/6/ Andrei Group; Rutgers School of Arts and Sciences; PHYS 331: Junior Physics Laboratory I; Particle Counting Statistics;

<https://www.physics.rutgers.edu/~eandrei/389/muon/poisson%20distribution%20counting%20statistics.pdf>

/7/ Mohammad Arkani; Measurement of dead time by time interval distribution method

https://www.researchgate.net/profile/Mohammad-Arkani/publication/270764522_Measurement_of_dead_time_by_time_interval_distribution_method

/8/ Henniger, R. Schwierz; Poisson Verteilung; Physikalisches Grundpraktikum; Technische Universität Dresden

<https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehveranstaltungen/praktika/pdf/PV.pdf>

/9/ Bernd Laquai; Die Statistik des Zerfalls

<http://www.opengeiger.de/StatistikDesZerfalls.pdf>

/10/ Bernd Laquai; Ein Zählimpulsgenerator mit Poisson-Statistik zur Prüfung der Auswerteelektronik von Geigerzählern und Szintillationszählern

<http://opengeiger.de/PoissonTestgen.pdf>